

Méthode de Broyden à mémoire limitée et approche de l'inverse de la matrice de Broyden

R. Aboulaich¹ – F. Guyomarc'h² – B. Philippe² – M. Ziani^{1,2}.

1 : LERMA – EMI – Rabat,

2 : IRISA – RENNES.

La simulation des phénomènes physiques mène souvent à la résolution de systèmes d'équations non linéaires. La méthode classique pour résoudre ce type de problème est la méthode de Newton. Si la solution initiale est suffisamment bien choisie, alors cette méthode converge rapidement (quadratiquement). Cependant, une itération de l'algorithme peut s'avérer coûteuse, car elle implique à chaque pas :

- le calcul de la matrice jacobienne ;
- la résolution d'un système linéaire impliquant cette matrice.

Les méthodes inexactes de Newton permettent de résoudre ce système linéaire approximativement en utilisant des méthodes itératives de type Newton-Krylov. Le coût de cette résolution peut être diminuer si le système linéaire est résolu itérativement en arrêtant la convergence du solveur linéaire dès que le résidu de celui-ci est inférieur à celui de l'itération de Newton en cours. Pour réduire le coût du calcul de la Jacobienne, les méthodes quasi-Newton sont des méthodes de choix, par exemple la méthode de Broyden [1] qui utilise des approximations successives de cette matrice en effectuant des mises à jour de rang un dans la direction de progression de l'algorithme.

Un inconvénient de la méthode de Broyden est le stockage de n_k éléments de la matrice de Broyden, où k est le nombre d'itérations effectuées jusqu'à convergence et n est la taille du problème. Ce coût peut devenir prohibitif si la convergence n'est pas assez rapide, et donc pour le réduire, plusieurs versions " *mémoire limitée* " de cet algorithme ont déjà été explorées [4] comme par exemple la permutation cyclique des vecteurs de Broyden et, plus récemment, la réduction du rang [2], qui se base sur l'approximation de la matrice de mise à jour par une matrice de rang inférieur.

Notre approche est d'approcher successivement, par une décomposition en valeurs singulières tronquée, l'inverse H_k de la matrice de Broyden B_k écrite sous la forme compacte proposée par Byrd et *al.* [3]. L'erreur commise dans ce cas est plus facilement contrôlable car H_k intervient dans des produits alors que B_k intervient dans des résolutions.

Après une étude théorique, nous présenterons des tests numériques pour illustrer le comportement de l'algorithme sur quelques cas classiques, comme le problème de convection-diffusion dont la non linéarité est forte pour les exemples très convectifs. Cet algorithme est comparé aux solveurs classiques dans un benchmark pour mieux cerner les critères d'une utilisation pertinente. Enfin, ces essais montreront aussi l'impact de la quantité de mémoire disponible pour le stockage sur la convergence de l'algorithme.

Références

- [1] C. G Broyden, *A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations*, Mathematics of computation 19, 103-119, 1965.
- [2] B. Van De Rotten, S. M. Verduyn Lunel, *A Limited Memory Broyden Method to Solve High-Dimensional Systems of Nonlinear Equations*, Tech. Report MI 2003-06, Mathematical Institute, University of Leiden, Leiden, The Netherlands, 2003.
- [3] R. H. Byrd, J. Nocedal and R. B. Schnabel, *Representations of quasi-Newton matrices and their use in limited memory methods*, Mathematical Programming, 63, 129–156, 1994.
- [4] Dennis Jr., J.E., More, J.J., *Quasi-Newton Methods, Motivation and Theory*, SIAM Review 19, 46-89, 1977.